KAEDAH LELARAN DALAM PERMASALAHAN SAINTIFIK

Kaedah lelaran adalah satu kaedah yang sesuai untuk mendapatkan penyelesaian atau nilai hampiran bagi suatu sistem persamaan linear yang dijana menerusi pelaksanaan proses pendiskretan dan/atau pembinaan penyuaian model matematik terbaik. Justeru, perbincangan tentang pengaplikasian kaedah lelaran dalam menyelesaikan pelbagai permasalahan saintifik yang diketengahkan dalam buku ini diharapkan dapat membantu memperkukuh kefahaman pembaca. Atas kelebihan ciri-ciri yang ada pada famili kaedah lelaran, buku ini sesuai sebagai bahan pengajaran dan pembelajaran oleh pensyarah, pelajar dan sesiapa sahaja yang berminat untuk mempelajari kaedah lelaran sebagai penyelesaian kepada permasalahan sistem linear.

USM UNIVERSITI SAINS MALAYSIA APEX PENERBIT USM
PENERBIT UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

KAEDAH LELARAN DALAM PERMASALAHAN SAINTIFIK

PENERBIT USM

KAEDAH LELARAN DALAM PERMASALAHAN SAINTIFIK

Editor
Jumat Sulaiman
Majid Khan Majahar Ali
Piakong Mohd. Tuah
Mohd. Khatim Hasan
Azali Saudi

KAEDAH LELARAN DALAM PERMASALAHAN SAINTIFIK

KAEDAH LELARAN DALAM PERMASALAHAN SAINTIFIK

Editor
Jumat Sulaiman
Majid Khan Majahar Ali
Piakong Mohd. Tuah
Mohd. Khatim Hasan
Azali Saudi

PENERBIT USM

Penerbit Universiti Sains Malaysia
Pulau Pinang

Beli di **www.karyausm.my**

www.penerbit.usm.my
penerbit@usm.my
PenerbitUSM
PenerbitUSM
penerbit_usm

Perpustakaan Negara Malaysia Data Pengkatalogan-dalam-Penerbitan

Kaedah Lelaran dalam Permasalahan Saintifik / Editor:
Jumat Sulaiman, Majid Khan Majahar Ali, Piakong Mohd. Tuah,
Mohd. Khatim Hasan, Azali Saudi.

ISBN 978-967-461-480-5
e-ISBN 978-967-461-481-2

1. Iterative methods (Mathematics).
2. Education, Higher–Research–Malaysia.
3. Government publications–Malaysia.
I. Jumat Sulaiman. II. Majid Khan Majahar Ali.
III. Piakong Mohd. Tuah. IV. Mohd. Khatim Hasan.
V. Azali Saudi.
518.26 QA297.8

Muka taip teks: Adobe Garamond Pro

Editor Naskhah: Nik Nurolaini Nik Mohd Isa
Pereka Bentuk Kulit Buku: Ahmad Fitri Ramli
Pembaca Pruf: Aida Izana Yaakub
Pengatur Huruf: Noraini Md Isa

Diterbitkan oleh Penerbit Universiti Sains Malaysia, 11800 USM Pulau Pinang, Malaysia.
Ahli Majlis Penerbitan Ilmiah Malaysia (MAPIM).

Dicetak oleh

Kandungan

Prakata

Alhamdulillah, setinggi-tinggi syukur ke hadrat Allah SWT kerana dengan izin-Nya, buku *Kaedah Lelaran dalam Permasalahan Saintifik* ini dapat diterbitkan. Penerbitan buku ini didorong oleh beberapa faktor, iaitu pertama, penulisan dalam buku ini merupakan kristalisasi daripada hasil penelitian para penyelidik, yang diharap dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan kaedah berangka, khususnya dalam bidang kejuruteraan, matematik, biologi dan sains persekitaran.

Faktor kedua ialah buku ini diharap dapat memberikan sumbangan signifikan dalam usaha peningkatan kualiti pembelajaran dan penyelidikan universiti awam dan swasta tempatan. Selain itu, buku ini juga diharap dapat meningkatkan kualiti penyelidikan serta penulisan buku akademik dalam bahasa. Kandungan buku ini ialah huraian komprehensif tentang teori-teori dasar dalam bidang kaedah berangka, termasuk implementasi teori dalam bentuk simulasi. Justeru, dengan adanya buku ini, diharapkan para mahasiswa akan lebih mudah mengikuti pembelajaran kaedah berangka dan melakukan penyelidikan dengan lebih berfokus.

Pada kesempatan ini juga, kami merakamkan penghargaan yang tidak terhingga kepada semua penyumbang bab, pihak yang terlibat secara langsung atau tidak langsung dalam penerbitan buku ini, serta geran jangka pendek PMATH/304/USM6315132.

Akhir kata, komen dan saranan daripada pembaca amat dialu-alukan untuk penambahbaikan buku ini pada masa hadapan.

Jun 2020

Singkatan

BTP	beza terhingga piawai
BTTP	beza terhingga tak piawai
CG	kecerunan terjugat
CMK	carian menuruni kecerunan
GMRES	generalised minimal residual
KBP	kaedah beza pusatan
KTT	kumpulan tak tersirat
KTTNP	kumpulan tak tersirat nyahpasangan
KTTT	kumpulan tak tersirat terubah suai
MR	misbah lembapan
PCBB	pecutan berlebihan berturut-turut
PBBP	pengenduran berlebihan berpecutan berprasyarat
PBB	pengenduran berlebihan berturut-turut
PBBB	pengenduran berlebihan berturut-turut berprasyarat
PBBT	pengenduran berlebihan berturut-turut terubah suai
RT	rumus trapezium
v-GHSD	pengering suria hibrid berlekuk v
PAB	pertukaran atas bawah
RMSE	punca min ralat kuasa dua
SEE	ralat piawai anggaran

Pengenalan

Jumat Sulaiman, Majid Khan Majahar Ali, Piakong Mohd. Tuah, Mohd. Khatim Hasan & Azali Saudi

Matematik gunaan adalah satu cabang matematik yang berkaitan pengaplikasian kaedah-kaedah matematik dalam bidang sains, kejuruteraan, perniagaan, sains komputer dan industri. Oleh itu, matematik gunaan ialah sains matematik dengan pengetahuan khusus. Istilah matematik gunaan juga menerangkan profesionalisme khusus ahli matematik yang mendapatkan penyelesaian bagi masalah praktikal dengan merangka dan mengkaji model matematik.

Buku ini ditulis untuk pelajar sarjana muda serta siswazah yang mengambil mata pelajaran serta melaksanakan penyelidikan dalam kaedah berangka. Buku ini adalah satu-satunya buku dalam bidang ini yang diterbitkan dalam bahasa Malaysia dan dilengkapi teknik-teknik penyelesaian terkini. Buku ini turut menyediakan asas matematik yang lengkap bagi kaedah berangka yang digunakan dalam pengiraan bagi menyelesaikan masalah saintifik dan kejuruteraan. Pengaturcaraan C/C++ yang disediakan dapat membantu pembaca menyelesaikan sendiri masalah yang lain dalam kategori yang sama. Pengaturcaraan ini juga boleh diubah suai bagi membentuk pengaturcaraan yang lebih kompleks bagi menyelesaikan masalah pengiraan projek tahun akhir bagi pelajar prasiswazah dan tesis bagi pelajar pascasiswazah.

Kemunculan komputer dan perkembangan sains dan teknologi dunia telah mewujudkan dimensi baharu dan meningkatkan lagi kepentingan matematik gunaan. Teknologi tersebut turut diaplikasikan dalam mengkaji masalah yang timbul daripada pelbagai bidang lain, komputer matematik pengiraan seperti teori sains komputer, algebra komputer dan analisis berangka. Dalam usaha mendapatkan penyelesaian analitikal dan/atau hampiran bagi sebarang permasalahan saintifik, fenomena permasalahan tersebut sering diperihalkan dalam bentuk model matematik. Seterusnya proses pendiskretan perlu dilaksanakan untuk menerbitkan persamaan penghampiran sebelum sistem persamaan linear yang sepadan dijana menggunakan kesemua titik terkedalam pada domain penyelesaian bagi setiap permasalahan saintifik yang dikaji.

Kajian kaedah lelaran sering menjadi sumber utama bagi memperoleh penyelesaian hampiran dalam menyelesaikan sebarang model matematik yang diungkapkan dalam bentuk persamaan terbitan atau kamiran serta nilai hampiran bagi parameter-parameter tak diketahui, khususnya dalam model matematik tak linear. Maka setiap bab dalam buku ini membincangkan kaedah lelaran yang tersendiri bergantung kepada jenis masalah serta mencadangkan kaedah penyelesaiannya.

Bab pertama oleh Mohd Usran Alibubin, Majid Khan Majahar Ali, Andang Sunarto dan Jumat Sulaiman membincangkan kaedah berangka dalam menyelesaikan masalah nilai sempadan dua titik linear. Masalah nilai sempadan ini akan didiskretkan untuk menerbitkan persamaan penghampiran beza terhingga tak piawai (BTTP) peringkat kedua dan kemudiannnya menghasilkan sistem persamaan linear. Selanjutnya penyelesaian hampiran ke atas sistem persamaan linear tersebut diperihalkan menerusi pelaksanaan kaedah lelaran pengenduran berlebihan berturut-turut terubah suai (PBBT) dengan parameter berpemberat ω_1 dan ω_2. Eksperimen berangka berangka ke atas sistem persamaan linear tersebut menunjukkan bahawa penyelesaian hampiran bagi kaedah PBBT adalah lebih jitu dan lebih cepat berbanding kaedah lelaran Gauss-Seidel pengenduran berlebihan berturut-turut (PBB) menerusi skema beza terhingga piawai (BTP) dan BTTP.

Bab kedua oleh Azali Saudi, Jumat Sulaiman dan Mohd Hanafi Ahmad Hijazi menerangkan tentang perancangan laluan robot menggunakan kaedah lelaran PBB sapuan suku. Aplikasi lelaran sapuan separuh dan sapuan suku digunakan semasa proses pengiraan fungsi-fungsi harmonik dalam suatu ruang konfigurasi. Justeru, proses pendiskretan beza terhingga berasaskan 5 titik dilaksanakan ke atas persamaan Laplace untuk menghasilkan sistem persamaan linear. Oleh itu, pendekatan yang mampu mengurangkan kerumitan pengiraan, iaitu lelaran sapuan separuh dan sapuan suku digunakan untuk meningkatkan prestasi kaedah lelaran. Dalam pengujian kecekapan pula, kaedah lelaran yang dipertimbangkan ialah kaedah PBB sapuan penuh, sapuan separuh dan sapuan suku.

Bab ketiga oleh A'qilah Ahmad Dahalan, Jumat Sulaiman dan Mohana Sundaram Muthuvalu turut membincangkan penyelesaian berangka menggunakan kaedah lelaran PBB sapuan separuh bagi persamaan terbitan separa pecahan satu matra. Dengan merujuk kepada terbitan Seikkala, persamaan terbitan separa pecahan kemudiannya diselesaikan dengan menggunakan skema beza terhingga tersirat untuk mendiskret masalah terbitan separa pecahan kepada sistem linear. Sistem linear yang terhasil kemudiannya diselesaikan secara berangka menggunakan kaedah lelaran PBB. Permasalahan terbitan separa pecahan dipertimbangkan dalam menentusahkan keberkesanan kaedah Gauss-Seidel sapuan penuh, PBB sapuan suku dan PBB sapuan separuh. Bagi tujuan perbandingan, tiga parameter diperhatikan, iaitu bilangan lelaran, masa lelaran (dalam saat) dan jarak Hausdorff.

Seterusnya, bab keempat oleh Piakong Mohd. Tuah, Darmesah Gabda dan Jumat Sulaiman merangkumi permasalahan dalam aspek penganggaran berangka model Gompeltz bagi pertumbuhan *Candida tropicalis* RETL-Cr1 menerusi pendekatan kaedah lelaran. Dalam konteks ini, proses pembinaan model matematik membabitkan penerbitan sistem persamaan linear bagi menentukan nilai anggaran ke atas parameter-parameter yang tak diketahui. Secara umumnya, terdapat dua famili kaedah penyelesaian yang boleh dipertimbangkan, iaitu kaedah terus dan kaedah lelaran. Walau bagaimanapun, buku ini hanya mempertimbangkan pendekatan kaedah lelaran, khususnya kaedah lelaran Gauss-Seidel untuk mendapatkan nilai hampiran ke atas parameter-parameter yang tak diketahui. Justeru, keputusan berangka dan pemilihan model Gompetz yang terbaik turut dibincangkan.

Dalam bab kelima, Ng Yit Hoe, Mohd. Khatim Hasan dan Jumat Sulaiman memfokuskan strategi penertiban pertukaran atas bawah (PAB) bagi famili PBB untuk menyelesaikan persamaan Poisson. Proses pendiskretan ke atas persamaan Poisson perlu dilakukan untuk menerbitkan persamaan penghampiran BTTP bagi menjana sistem persamaan linear. Oleh itu, kaedah-kaedah lelaran PBB sapuan penuh, sapuan suku, PBB sapuan penuh PAB dan sapuan suku PAB dibangunkan untuk menguji kecekapan kaedah lelaran.

Bab keenam oleh Norizyan Izzati Mohd Fauzi dan Jumat Sulaiman pula memfokuskan pembangunan penyelesaian splin polinomial ke atas sistem persamaan linear dengan menggunakan pendekatan kaedah lelaran Gauss-Seidel, PBB dan PBBT. Dalam usaha memerihalkan keefisienan pengiraan bagi ketiga-tiga kaedah lelaran berkenaan, permasalahan nilai sempadan dua titik peringkat kedua linear yang ditakrifkan dipertimbangkan. Kemudian bagi memperoleh penyelesaian berangka, proses pendiskretan perlu dilakukan untuk menerbitkan persamaan penghampiran splin dan kemudiannya digunakan untuk menjana sistem persamaan linear. Sistem persamaan linear tersebut seterusnya diselesaikan menerusi kaedah lelaran Gauss-Seidel, PBB dan PBBT. Tiga permasalahan dipertimbangkan bagi tujuan pengujian kebagusan kaedah-kaedah lelaran yang diusulkan menerusi penghampiran splin kuadratik. Seterusnya, bagi tujuan perbandingan ke atas ketiga-tiga kaedah lelaran, terdapat tiga parameter yang diperhatikan, iaitu bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat mutlak maksimum. Dalam pelaksanaan kaedah-kaedah lelaran tersebut, nilai bagi ralat toleransi adalah malar pada pelbagai saiz grid. Hasil pemerhatian eksperimen berangka menunjukkan bahawa kaedah lelaran PBBT adalah lebih superior daripada segi bilangan lelaran dan masa lelaran pada pelbagai saiz grid berbanding kaedah lelaran Gauss-Seidel dan PBB.

Seterusnya, bab ketujuh oleh Majid Khan Majahar Ali, Mohd Tahir Ismail, Ahmad Fudholi, Mohana Sundaram Muthuvalu, Jumat Sulaiman, dan Suhaimi Md. Yasir mengkaji pengaplikasian kaedah berangka pada lengkung kadar pengeringan, iaitu bagi mendapatkan lengkung pengeringan, dan mencadangkan model pengeringan (model semi empirikal) yang sesuai. Perbandingan dengan model pengeringan Newton dan Henderson serta Pabis juga dilakukan. Terdapat enam model pengeringan berdasarkan analisis kinetik. Seterusnya, penghalusan kadar pengeringan dilakukan secara berangka menggunakan kaedah splin kubik diterbitkan dalam bentuk sistem persamaan matriks dan seterusnya penyelesaian persamaan dapat ditunjukkan menggunakan kaedah lelaran. Pertama, proses pendiskretan perlu dilakukan untuk menerbitkan persamaan penghampiran splin bagi menjana sistem persamaan linear yang kemudiannya diselesaikan dengan menggunakan kaedah lelaran Gauss-Seidel. Kaedah lelaran ini juga telah terbukti keberkesanannya dalam menyelesaikan masalah lengkung kadar pengeringan. Seterusnya, penyuaian terbaik model semi empirikal dan splin kubik dilakukan terhadap data pengeringan rumpai laut dan hasil keputusan penyuaian dipaparkan daripada nilai statistik R^2 yang tinggi serta punca min ralat kuasa dua dan ralat piawai anggaran yang rendah.

Bab kelapan oleh Andang Sunarto, Jumat Sulaiman dan Azali Saudi pula membincangkan cara untuk membina dan mengkaji keberkesanan kaedah lelaran pengenduran berlebihan berpecutan berprasyarat (PBBP) untuk menyelesaikan persamaan terbitan separa parabolik pecahan masa dengan menggunakan persamaan penghampiran beza terhingga tersirat Caputo. Untuk meneliti keberkesanan kaedah PBBP, kaedah lelaran Gauss-Seidel, Gauss-Seidel berprasyarat dan PBB berprasyarat (PBBB) digunakan sebagai kaedah kawalan. Seterusnya bagi tujuan perbandingan ke atas ketiga-tiga kaedah lelaran, terdapat tiga parameter yang diperhatikan, iaitu bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat mutlak maksimum.

Seterusnya dalam bab kesembilan, Mohd Kamalrulzaman Md Akhir, Jumat Sulaiman, Mohamed Othman, Mohana Sundaram Muthuvalu dan Elayaraja Aruchunan, mengkaji penggunaan kaedah lelaran kumpulan tak tersirat terubah suai (KTTT) untuk menyelesaikan persamaan Helmholtz dua matra dengan syarat sempadan Dirichlet. Untuk mengkaji keberkesanan kelebihan kaedah lelaran 4 titik KTTT, tiga parameter dikaji, iaitu bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat maksimum untuk tujuan perbandingan. Kaedah lelaran Gauss-Seidel pula bertindak sebagai kaedah lelaran piawai dalam perbandingan keputusan berangka. Dalam pelaksanaan eksperimen berangka, ujian penumpuan dilaksanakan dengan menggunakan nilai toleransi ralat 10^{-10}. Secara keseluruhannya, keputusan berangka menunjukkan bahawa kaedah lelaran 4 titik KTTT adalah lebih baik berbanding kaedah lelaran kumpulan tak tersirat nyahpasangan (KTTNP) dan kumpulan tak tersirat (KTT).

Akhir sekali, bab oleh Elayaraja Aruchunan, Mohana Sundaram Muthuvalu, Koh Wei Sin dan Jumat Sulaiman memfokuskan perbincangan tentang keberkesanan famili kaedah lelaran subruang Krylov, khususnya perumusan persamaan penghampiran beza kuadratur dan pelaksanaan kaedah lelaran kecerunan konjugat (CG) serta *generalised minimal residual* (GMRES) dalam menyelesaikan sistem linear yang dijana menerusi proses pendiskretan ke atas permasalahan bagi persamaan kamiran-terbitan jenis Fredholm peringkat pertama. Seterusnya bagi tujuan perbandingan ke atas ketiga-tiga kaedah lelaran, terdapat tiga parameter yang diperhatikan, iaitu bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat mutlak maksimum. Dalam pelaksanaan kaedah-kaedah lelaran tersebut, nilai bagi ralat toleransi adalah malar pada pelbagai saiz grid. Keputusan berangka yang diperoleh jelas memperlihatkan bahawa kaedah lelaran GMRES adalah lebih efisien berbanding kaedah CG dalam menyelesaikan sistem persamaan linear yang berskala besar.

8

Penyelesaian Caputo Hampiran bagi Persamaan Terbitan Separa Pecahan Menggunakan Lelaran Pengenduran Berlebihan Berpecutan Berprasyarat

Andang Sunarto, Jumat Sulaiman & Azali Saudi

1 Pengenalan

Berdasarkan kajian sebelum ini [1–4], banyak model matematik berdasarkan persamaan terbitan separa pecahan telah dibangunkan. Susulan itu, dapat diperhatikan bahawa terdapat beberapa kaedah yang digunakan untuk menyelesaikan model matematik berkenaan. Sebagai contohnya, perbahasan tentang perumusan dan pengaplikasian kaedah pembezaan terhingga [5] yang digunakan untuk mendapatkan penyelesaian analitikal dan/atau berangka bagi persamaan terbitan separa pecahan. Selain daripada kaedah tersebut, penyelidik lain juga telah membicarakan kaedah beza terhingga seperti kaedah pendiskretan tak tersirat dan tersirat [6–9]. Seperti diketahui bahawa kaedah pendiskretan tak tersirat adalah dikelaskan sebagai kaedah stabil bersyarat. Justeru, dalam perbincangan ini, permasalahan persamaan terbitan separa pecahan akan didiskretkan menerusi kaedah pendiskretan beza terhingga tersirat dan pengoperasi terbitan separa pecahan Caputo peringkat ke-α digunakan untuk menerbitkan persamaan penghampiran beza terhingga tersirat Caputo yang sepadan. Kemudiannya persamaan penghampiran tersebut pula digunakan untuk menjana sistem persamaan linear tiga pepenjuru. Perkara yang menarik dapat diperhatikan ialah matriks pekali bagi sistem persamaan linear tersebut bersifat jarang dan berskala besar. Maka kaedah lelaran ialah pilihan alternatif untuk mendapatkan penyelesaian hampiran ke atas sistem linear tersebut.

Setakat ini penelitian kaedah lelaran menjadi isu perbincangan dan dapat diperhatikan menerusi perbincangan lanjut tentang beberapa famili kaedah lelaran oleh ramai penyelidik [10–13]. Selain kaedah-kaedah lelaran tersebut, konsep lelaran blok juga telah diperkenalkan [14–16] untuk menunjukkan kecekapan dan kejituan pengiraan. Lanjutan daripada penemuan kaedah-kaedah lelaran tersebut, didapati bahawa perkembangan famili kaedah lelaran berprasyarat [10,13,17,18,19] juga telah menarik perhatian secara meluas sebagai satu daripada kaedah lelaran yang efisien dalam menyelesaikan sistem linear.

Disebabkan kelebihan yang ada pada kaedah lelaran ini, matlamat perbincangan ini ialah membina dan mengkaji keberkesanan kaedah lelaran pengenduran berlebihan berpecutan berprasyarat (PBBP) untuk menyelesaikan persamaan terbitan separa parabolik pecahan masa dengan menggunakan persamaan penghampiran Caputo beza terhingga tersirat. Untuk meneliti keberkesanan kaedah PBBP, kaedah lelaran Gauss-Seidel, Gauss-Seidel berprasyarat dan pengenduran berlebihan berturut-turut berprasyarat (PBBB) digunakan sebagai kaedah kawalan.

Untuk mengkaji keberkesanan kaedah PBBP, pertimbangkan persamaan terbitan separa parabolik pecahan masa yang ditakrifkan sebagai

$$\frac{\partial^{\alpha} U(x,t)}{\partial^{\alpha}} = a(x)\frac{\partial^{2} U(x,t)}{\partial x^{2}} + b(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + c(x)U(x,t) \tag{1.1}$$

Dengan x, $b(x)$ dan $c(x)$ ialah fungsi-fungsi diketahui atau pemalar, manakala α ialah parameter yang merujuk kepada peringkat terbitan pecahan masa.

2 Perihalan Konsep Asas Terhadap Kalkulus Pecahan

Sebelum membina persamaan penghampiran beza terhingga tersirat Caputo pada persamaan (1.1), berikut adalah beberapa definisi asas bagi teori terbitan pecahan yang digunakan dalam perbincangan ini.

Definisi 1. [10] Pengoperasi kamiran pecahan Riemann-Liouville, J^{α} peringkat ke-α ditakrifkan sebagai

$$J^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x} (x-t)^{\alpha} f(t)\,dt, \alpha > 0, x > 0 \tag{2.1}$$

Definisi 2. [10] Pengoperasi terbitan separa pecahan Caputo, D^{α} peringkat ke-α ditakrifkan sebagai

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{0}^{x} \frac{f^{(m)}(t)}{(x-1)^{\alpha-m+1}}\,dt, \alpha > 0 \tag{2.2}$$

dengan $m-1<\alpha\leq m,\ m\in \mathrm{N},\ x>0.$

Untuk mendapatkan penyelesaian berangka persamaan (1.1) dengan syarat sempadan Dirichlet, pertama kita perlu terbitkan persamaan penghampiran beza terhingga tersirat berdasarkan definisi terbitan Caputo dan pengoperasi terbitan pecahan bukan tempatan. Seperti diketahui bahawa persamaan penghampiran tersirat tersebut boleh dikategorikan sebagai skema pendiskretan stabil tanpa syarat. Bagi mendapatkan persamaan penghampiran ke atas persamaan (1.1), domain penyelesaian permasalahan yang terbatas $0\leq x\leq \alpha$, dengan $0<\alpha<1$, manakala parameter α pula merujuk kepada peringkat terbitan pecahan masa. Selain itu, syarat-syarat sempadan bagi persamaan (1.1) diberikan sebagai

$$U(0,t)=g_0(t), U(l,t)=g_1(t),$$

dan syarat awalnya pula diberikan oleh

$$U(x,0)=f(x),$$

dengan $g_0(t)$, $g_1(t)$, dan $f(x)$ ialah fungsi yang diketahui. Sementara itu, penghampiran diskret bagi terbitan pecahan masa terhadap persamaan (1.1) dapat diwakili dengan menggunakan pengoperasi terbitan separa pecahan Caputo pada peringkat ke-α, ditakrifkan sebagai [10,11]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(n-1)}\int_0^\infty \frac{\partial u(x-s)}{\partial t}(t-s)^{-\alpha}ds,\ t>0, 0<\alpha<1 \tag{2.3}$$

3 Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Caputo

Berpandukan persamaan (2.3), perumusan terbitan separa pecahan Caputo terhadap kaedah penghampiran peringkat pertama diberikan sebagai

$$D_t^\alpha U_{i,n}\cong \sigma_{\alpha,k}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{(\alpha)}\left(U_{i,n-j+1}-U_{i,n-j}\right) \tag{3.1}$$

Untuk memudahkan perumusan persamaan penghampiran terhadap permasalahan kajian, pertimbangkan ungkapan-ungkapan berikut

$$\sigma_{\alpha,k}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)k^\alpha}$$

dan

$$\omega_j^{(\alpha)} = j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}.$$

Sebelum mendiskretkan persamaan (1.1), domain penyelesaian pada persamaan tersebut perlu dibahagikan secara seragam. Justeru, pertimbangkan nilai integer positif m dan n merujuk kepada saiz grid terhadap ruang dan masa yang masing-masing ditakrifkan sebagai $h = \Delta x = \dfrac{\gamma - 0}{m}$ dan $k = \Delta t = \dfrac{T}{n}$. Berdasarkan saiz grid berkenaan, bina rangkaian grid seragam ke atas domain penyelesaian dan titik-titik grid terhadap domain ruang $[0, \gamma]$ yang ditandakan sebagai nombor $x_i = ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m$ dan sementara itu, titik-titik grid dalam tempoh rantau masa $[0, T]$ yang dilabelkan $t_j = jk,\ j = 0, 1, 2, \ldots, m$. Maka nilai fungsi $U(x, t)$ pada sebarang titik grid ditandakan sebagai $U_{i,j} = U(x_i, t_j)$.

Dengan menggunakan persamaan (3.1) dan skema pendiskretan beza terhingga tersirat, persamaan penghampiran beza terhingga tersirat Caputo pada persamaan (1.1) ke titik grid yang berpusat di $(x_i, t_j) = (ih, nk)$ diberikan sebagai

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha,k} \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(\alpha)} (U_{i,n-j+1} - U_{i,n-j}) \qquad (3.2)\\ = a_1 \frac{1}{h^2}(U_{i-1,n} - 2U_{i,n} + U_{i+1,n}) + b_i \frac{1}{2h}(U_{i+1,n} - U_{i-1,n}) + c_i U_{i,n},\end{aligned}$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Persamaan penghampiran (3.2) dikenali sebagai persamaan penghampiran beza terhingga tersirat sapuan penuh dengan kejituan berperingkat pertama terhadap masa dan peringkat kedua terhadap ruang. Pada asasnya, persamaan penghampiran (3.2) boleh dituliskan semula berdasarkan tahap masa yang tertentu.

Untuk memudahkan perbincangan selanjutnya, pertimbangkan persamaan penghampiran untuk $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha,k} \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(\alpha)} (U_{i,n-j+1} - U_{i,n-j}) \qquad (3.3a)\\ = \left(\frac{a_i}{h^2} - \frac{b_i}{2h}\right) U_{i-1,n} + \left(c_i - \frac{2a_i}{h^2}\right) U_{i,n} + \left(\frac{a_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h}\right) U_{i+1,n}\\ = p_i U_{i-1,n} + q_i U_{i,n} + r_i U_{i+1,n},\end{aligned}$$

dengan

$$p_i = \frac{a_i}{h^2} - \frac{b_i}{2h},\ q_i = c_i - \frac{2a_i}{h^2},\ r_i = \frac{a_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h}$$

Apabila $n = 1$, dapat ditunjukkan bahawa

$$-p_i U_{i-1,1} + q_i^* U_{i,1} - r_i U_{i+1,1} = f_{i,1},\ i = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{3.3b}$$

dengan

$$\omega_j^{(\alpha)} = 1,\ q_i^* = \sigma_{\alpha,k} - q_i,\ f_{i,1} = \sigma_{\alpha,k} U_{i,1}$$

Berdasarkan persamaan (3.3b), dapat diperhatikan bahawa sistem linear tiga pepenjuru boleh dibina dalam bentuk matriks sebagai

$$\mathrm{A}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{f} \tag{3.4}$$

dengan

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} q_1^* & -r_1 & & & & \\ -p_2 & q_2^* & -r_2 & & & \\ & -p_3 & q_3^* & -r_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -p_{m-2} & q_{m-2}^* & -r_{m-2} \\ & & & & -p_{m-1} & q_{m-1}^* \end{bmatrix}_{(m-1)x(m-1)},$$

$$\underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{21} & U_{31} & \cdots & U_{m-2,1} & U_{m-1,1} \end{bmatrix}^T,$$

$$\underset{\sim}{f} = \begin{bmatrix} U_{11} + p_1 U_{01} & U_{21} & U_{31} & \cdots & U_{m-2,1} & U_{m-1,1} + p_{m-1} U_{m,1} \end{bmatrix}^T.$$

4 Perumusan Kaedah Lelaran Pengenduran Berlebihan Berpecutan Berprasyarat

Dengan meninjau ciri-ciri matriks pekali ke atas sistem linear (3.4), didapati bahawa sistem persamaan linear tiga pepenjuru tersebut mempunyai matriks pekali yang berskala besar dan jarang. Seperti yang dinyatakan dalam Bahagian 1, ramai penyelidik telah membincangkan pelbagai kaedah lelaran. Untuk mendapatkan penyelesaian hampiran bagi sistem tiga pepenjuru linear (3.4), perbincangan ini mempertimbangkan kaedah lelaran PBBP [10,17,18].

Sebelum melaksanakan kaedah lelaran PBBP, sistem linear asal [11,12,13] perlu diolah semula ke dalam bentuk sistem linear berprasyarat

$$\mathrm{A}^{*}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}^{*} \tag{4.1}$$

dengan

$$\mathrm{A}^{*} = \mathrm{PAP}^{T},$$
$$\underset{\sim}{f}^{*} = \mathrm{P}\underset{\sim}{f},$$
$$\underset{\sim}{U} = \mathrm{P}^{T}\underset{\sim}{x}$$

Hakikatnya, matriks P dikenali sebagai matriks berprasyarat dan ditakrifkan sebagai [19]

$$\mathrm{P} = \mathrm{I} + \mathrm{S} \tag{4.2}$$

dengan

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(m-1)x(m-1)},$$

dan matriks I ialah matriks identiti. Untuk membangunkan perumusan kaedah PBBP, matriks pekali A^{*} (3.4) perlu ditulis semula sebagai penjumlahan tiga matriks

$$\mathrm{A}^{*} = \mathrm{D} - \mathrm{L} - \mathrm{V} \tag{4.3}$$

dengan D, L dan V masing-masing ialah matriks pepenjuru, matriks segi tiga bawah dan segi tiga atas.

Dengan menggunakan persamaan (4.1) dan (4.3), perumusan kaedah lelaran PBBP boleh dinyatakan secara am sebagai [17,18,19]

$$\underset{\sim}{x}^{(k+1)} = (D-\omega L)^{-1}\left[\beta V + (\beta-\omega)D + (1-\beta)D\right]\underset{\sim}{x}^{(k)} + \beta(D-\omega L)^{-1} f \tag{4.4}$$

dengan $\underset{\sim}{x}^{(k+1)}$ mewakili vektor yang tidak diketahui pada lelaran (k+1), serta β dan ω adalah dua parameter berpecutan. Jika $\beta = \omega$, kaedah ini dikenali sebagai kaedah lelaran PBBB. Justeru, pelaksanaan kaedah lelaran PBBP boleh diperihalkan dalam Algoritma 1.

ALGORITMA 1: Kaedah PBBP

i. Setkan $\widetilde{U} \leftarrow 0$ dan $\varepsilon \leftarrow 10^{-10}$.
ii. Untuk $j = 1, 2, \ldots, n$ laksanakan
   a. Untuk $i = 1, 2, \ldots, m-1$ kirakan
   $$\underset{\sim}{x}^{(k+1)} = (D-\omega L)^{-1}\left[\beta V + (\beta-\omega)D + (1-\beta)D\right]\underset{\sim}{x}^{(k)} + \beta(D-\omega L)^{-1} f, \underset{\sim}{U}^{(k+1)} = P^T \underset{\sim}{x}^{(k+1)}$$
   b. Uji penumpuan $\left\|\underset{\sim}{U}^{(k+1)} - \underset{\sim}{U}^{(k)}\right\| \le \varepsilon = 10^{-10}$. Jika menumpu, teruskan ke langkah iii. Sebaliknya, kembali ke langkah ii(a).
iii. Paparkan penyelesaian hampiran

5 Eksperimen Berangka

Dengan menggunakan persamaan penghampiran (3.3a), perbincangan ini mengambil kira satu contoh persamaan resapan pecahan masa untuk menguji keberkesanan kaedah lelaran Gauss-Seidel, Gauss-Seidel berprasyarat, PBBB dan PBBP. Bagi membandingkan keberkesanan pengiraan terhadap keempat-empat kaedah lelaran tersebut, tiga kriteria telah dicadangkan seperti bilangan lelaran, masa lelaran (dalam saat) dan ralat mutlak maksimum pada tiga nilai α yang berbeza, iaitu $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.50$ dan $\alpha = 0.75$. Semasa pelaksanaan eksperimen berangka, ujian penumpuan lelaran hanya mempertimbangkan ralat toleransi yang ditetapkan iaitu $\varepsilon = 10^{-10}$.

Pertimbangkan permasalahan nilai sempadan awal pecahan masa yang diberikan sebagai [20]:

$$\frac{\partial^\alpha U(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, 0 < \alpha \le 1, 0 \le x \le \gamma, t > 0 \tag{5.1}$$

dengan syarat-syarat sempadannya pula dinyatakan dalam bentuk peringkat pecahan sebagai

$$U(0,t)=\frac{2kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{5.2a}$$

$$U(l,t)=l^2+\frac{2kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{5.2b}$$

dan syarat awalnya ialah

$$U(x,0)=x^2 \tag{5.3}$$

Dengan mempertimbangkan persamaan (5.1) pada $\alpha=1$, dapat diperhatikan bahawa persamaan tersebut boleh diungkapkan semula sebagai persamaan resapan piawai

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0\le x\le \gamma, \quad t>0 \tag{5.4}$$

tertakluk kepada syarat awal

$$U(x,0)=x^2,$$

dan syarat-syarat sempadannya sebagai

$$U(0,t)=2kt, U(l,t)=l^2+2kt$$

Kemudiannya penyelesaian analitikal bagi persamaan (5.4) dapat diperoleh sebagai

$$U(x,t)=x^2+2kt.$$

Selanjutnya dengan menggunakan fungsi berikut:

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\partial^n U(x,0)}{\partial t^n}\frac{t^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\partial^{mn+i} U(x,0)}{\partial t^{mn+i}}\frac{t^{n\alpha+i}}{\Gamma(n\alpha+i+1)}$$

Untuk $0<\alpha\le 1$, dapat ditunjukkan bahawa penyelesaian analitikal bagi persamaan (5.1) diberikan sebagai

$$U(x,t)=x^2+2k\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

JADUAL 1 Perbandingan bilangan lelaran, masa lelaran (saat) dan ralat maksimum bagi kaedah lelaran pada α = 0.25, 0.50 dan 0.75

M	Kaedah	α = 0.25			α = 0.50			α = 0.75		
		K	Masa	Ralat Maks	K	Masa	Ralat Maks	K	Masa	Ralat Maks
128	Gauss-Seidel	21017	37.73	9.9e-5	13601	5.92	9.8e-5	6695	2.94	1.3e-4
	Gauss-Seidel berprasyarat	7292	35.86	9.9e-5	4715	2.23	9.8e-5	2319	1.93	1.3e-4
	PBBB	281	2.24	9.9e-5	229	1.95	9.8e-5	164	1.63	1.3e-4
	PBBP	280	1.12	9.9e-5	225	1.50	9.8e-5	160	1.59	1.3e-4
256	Gauss-Seidel	77231	343.63	1.0e-4	50095	42.17	9.9e-5	24732	20.70	1.3e-4
	Gauss-Seidel berprasyarat	26884	261.56	9.9e-5	17417	16.68	9.8e-5	8585	12.37	1.3e-4
	PBBB	1428	16.90	9.9e-5	1171	12.61	9.8e-5	814	8.90	1.3e-4
	PBBP	1100	12.44	9.9e-5	950	10.75	9.8e-5	713	8.13	1.3e-4
512	Gauss-Seidel	281598	2747.34	1.2e-4	183181	339.85	1.0e-4	90783	166.75	1.3e-4
	Gauss-Seidel berprasyarat	98422	1916.28	1.0e-4	63298	123.01	9.9e-5	31619	62.78	1.3e-4
	PBBB	5524	113.86	9.9e-5	4520	91.37	9.8e-5	11695	61.98	1.3e-4
	PBBP	4397	92.58	9.9e-5	3754	78.34	9.8e-5	2780	59.09	1.3e-4
1024	Gauss-Seidel	1017140	68285.36	1.0e-4	663971	2454.53	1.0e-5	330622	1209.39	1.4e-4
	Gauss-Seidel berprasyarat	357258	14064.44	1.4e-4	232784	1007.47	1.0e-5	115617	820.93	1.3e-4
	PBBB	20574	817.59	9.9e-5	16842	662.23	9.8e-5	11695	456.23	1.3e-4
	PBBP	16487	699.81	9.9e-5	14058	607.00	9.8e-5	10394	429.58	1.3e-4
2048	Gauss-Seidel	3631638	58914.30	1.3e-4	2380946	17795.25	1.3e-4	1192528	8794.26	1.7e-4
	Gauss-Seidel berprasyarat	121156	4104.17	1.3e-4	19153.0	3239.84	13e-5	112899	1305.5	1.3e-4
	PBBB	75580	3043.59	1.3e-4	61941	2894.7	9.9e-5	43070	337.1	1.3e-4
	PBBP	56289	3002.21	1.3e-4	46535	2870.12	9.9e-5	33819	305.2	1.3e-4

Semua keputusan eksperimen berangka untuk persamaan (5.1), yang diperoleh daripada pelaksanaan kaedah lelaran Gauss-Seidel, Gauss-Seidel berprasyarat, PBBB dan PBBP telah direkodkan dalam Jadual 1 pada lima nilai yang berbeza bagi saiz grid, iaitu $m = 128, 256, 512, 1024$ dan 2048.

6 Kesimpulan

Dalam usaha untuk mendapatkan penyelesaian berangka bagi persamaan terbitan separa pecahan masa, khususnya persamaan resapan pecahan masa, perbincangan ini telah memperihalkan penerbitan persamaan penghampiran beza terhingga tersirat Caputo yang digunakan untuk menjana sistem persamaan linear pada setiap paras masa. Berpandukan penelitian terhadap keputusan eksperimen berangka bagi kaedah lelaran Gauss-Seidel, Gauss-Seidel berprasyarat, PBBB dan PBBP, jelas didapati bahawa, pada $\alpha = 0.25$ bilangan kaedah lelaran PBBP adalah menurun sekitar 64.87% hingga 99.79% berbanding kaedah Gauss-Seidel. Masa pelaksanaan lelaran bagi kaedah PBBP juga adalah lebih cepat iaitu sekitar 4.95% hingga 98.97% berbanding kaedah lelaran Gauss-Seidel. Justeru, dapat disimpulkan bahawa kaedah lelaran PBBP hanya memerlukan jumlah yang kecil terhadap bilangan lelaran dan masa lelaran berbanding kaedah lelaran PBBB, Gauss-Seidel berprasyarat dan Gauss-Seidel. Walau bagaimanapun, kejituan penyelesaian yang diperoleh bagi keempat-empat kaedah lelaran tersebut adalah setara.

Rujukan

1. Abdullah, A.R. 1991. The four point explicit decoupled group (EDG) method: A fast Poisson solver. *International Journal of Computer Mathematics*, 38: 61–70.
2. Baleanu, D., Machado, J.A.T., Catani, C., Baleanu, M.T. & Yang, X.J. 2014. Local fractional variational iteration & decomposition method for wave equation on Cantor sets within local fractional operators. *Abstract and Applied Analysis*, 1–6.
3. Ege, S.M. & Misirli, E. 2017. A new method for solving non linear fractional differential equations. *New Trend in Mathematicals Sciences*, 5(1): 225–233.
4. Meerschaert, M.M. & Tadjeran, C. 2004. Finite difference approximation for fractional advection-dispersion flow equations. *JCAM*, 172: 145–155.
5. Mao, Z,. Xiao, A., Yu, Z. & Shi, L. 2014. Finite difference and sinc-collacation approximations to a class of fractional diffusion wave equations. *Journal of Applied Mathematics*, 1–11.
6. Zhang, Y. 2009. A finite difference method for fractional partial differential equation. *Applied Mathematics and Computation*, 215: 524–529.

7. Duan, D.S, Guo, A.P. & Yun, W.Z. 2014. Similarity solution for fractional diffusion equation. *Abstract and Applied Analysis*, 1–5.
8. Feras, L.L., Ford, N.J., Morgado, M.L. & Robelo, M. 2014. A numerical method for the solution of the time-fractional diffusion equation. *Lecture Notes in Computer Science,* 8579: 117–131.
9. Al-Shibani, F.S., Md. Ismail, A.I. & Abdullah, F.A. 2014. Explicit finite difference methods for the solution of the one dimensional time fractional advection diffusion equation. *AIP Conference Proceeding*, 160: 380–385.
10. Su, L. & Cheng, P. 2013. A weight average finite difference method for the fractional convection diffusion equation. *Advances in Mathematical Physics*, 1–5.
11. Evan, D.J. & Martins, M.M. 2007. The AOR method for preconditioned linear systems. *International Journal of Computer Mathematics*, 56: 69–76.
12. Young, D.M. 1971. *Iterative Solution of Large Linear Systems.* London: Academic Press.
13. Hackbusch, W. 1995. *Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations.* New York: Springer-Verlag.
14. Saad, Y. 1996. *Iterative Method for Sparse Linear Systems.* Boston: International Thomas Publishing.
15. Ming, K.L. & Mohd Ali, M. 2015. New explicit group iterative methods in the solution of three dimensional hyperbolic telegraph equations. *Journal of Computational Physics*, 294: 382–404.
16. Md Akhir, M.K. & Sulaiman, J. 2017. Explicit decoupled group iterative method for the triangle element solution of 2D Helmholtz equations. *International Mathematical Forum*, 12(16): 771–779.
17. Yousif, W.S., Santos, J.L. & Evans, D.J. 2013. Explicit group USSOR method for solving elliptic partial differential equations. *Neural, Parallel and Scientific Computations*, 21(22): 279–292.
18. Li, A. 2012. A new preconditioned AOR iterative method and comparison theorems for linear systems. *IAENG International Journal of Applied Mathematics,* 42: 1–3.
19. Huang, T., Cheng, G., Evan, D.J. & Cheng, X. 2005. AOR type for solving preconditioned linear systems. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(8): 969–976.
20. Gunawardena, A.D., Jain, K. & Synder, L. 1991. Modified iterative methods for consistent linear systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 152–154: 123–143.
21. Ali, D., Erman, S., Ozgur, B. & Korkmaz, E. 2013. Analysis of fractional partial differential equations by Taylor Series Expansion. *Boundary Value Problems*, 68: 1–12.