Chapter Book

by Andang Sunarto

8

Penyelesaian Caputo Hampiran bagi Persamaan Terbitan Separa Pecahan Menggunakan Lelaran Pengenduran Berlebihan Berpecutan Berprasyarat

Andang Sunarto, Jumat Sulaiman & Azali Saudi

1 Pengenalan

Berdasarkan kajian sebelum ini [1–4], banyak model matematik berdasarkan persamaan terbitan separa pecahan telah dibangunkan. Susulan itu, dapat diperhatikan bahawa terdapat beberapa kaedah yang digunakan untuk menyelesaikan model matematik berkenaan. Sebagai contohnya, perbahasan tentang perumusan dan pengaplikasian kaedah pembezaan terhingga [5] yang digunakan untuk mendapatkan penyelesaian analitikal dan/atau berangka bagi persamaan terbitan separa pecahan. Selain daripada kaedah tersebut, penyelidik lain juga telah membicarakan kaedah beza terhingga seperti kaedah pendiskretan tak tersirat dan tersirat [6–9]. Seperti diketahui bahawa kaedah pendiskretan tak tersirat adalah dikelaskan sebagai kaedah stabil bersyarat. Justeru, dalam perbincangan ini, permasalahan persamaan terbitan separa pecahan akan didiskretkan menerusi kaedah pendiskretan beza terhingga tersirat dan pengoperasi terbitan separa pecahan Caputo peringkat ke-α digunakan untuk menerbitkan persamaan penghampiran beza terhingga tersirat Caputo yang sepadan. Kemudiannya persamaan penghampiran tersebut pula digunakan untuk menjana sistem persamaan linear tiga pepenjuru. Perkara yang menarik dapat diperhatikan ialah matriks pekali bagi sistem persamaan linear tersebut bersifat jarang dan berskala besar. Maka kaedah lelaran ialah pilihan alternatif untuk mendapatkan penyelesaian hampiran ke atas sistem linear tersebut.

Setakat ini penelitian kaedah lelaran menjadi isu perbincangan dan dapat diperhatikan menerusi perbincangan lanjut tentang beberapa famili kaedah lelaran oleh ramai penyelidik [10–13]. Selain kaedah-kaedah lelaran tersebut, konsep lelaran blok juga telah diperkenalkan [14–16] untuk menunjukkan kecekapan dan kejituan pengiraan. Lanjutan daripada penemuan kaedah-kaedah lelaran tersebut, didapati bahawa perkembangan famili kaedah lelaran berprasyarat [10,13,17,18,19] juga telah menarik perhatian secara meluas sebagai satu daripada kaedah lelaran yang efisien dalam menyelesaikan sistem linear.

Disebabkan kelebihan yang ada pada kaedah lelaran ini, matlamat perbincangan ini ialah membina dan mengkaji keberkesanan kaedah lelaran pengenduran berlebihan berpecutan berprasyarat (PBBP) untuk menyelesaikan persamaan terbitan separa parabolik pecahan masa dengan menggunakan persamaan penghampiran Caputo beza terhingga tersirat. Untuk meneliti keberkesanan kaedah PBBP, kaedah lelaran Gauss-Seidel, Gauss-Seidel berprasyarat dan pengenduran berlebihan berturut-turut berprasyarat (PBBB) digunakan sebagai kaedah kawalan.

Untuk mengkaji keberkesanan kaedah PBBP, pertimbangkan persamaan terbitan separa parabolik pecahan masa yang ditakrifkan sebagai

$$\frac{\partial^\alpha U(x,t)}{\partial^\alpha} = a(x)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + c(x)U(x,t) \tag{1.1}$$

Dengan x, $b(x)$ dan $c(x)$ ialah fungsi-fungsi diketahui atau pemalar, manakala α ialah parameter yang merujuk kepada peringkat terbitan pecahan masa.

2 Perihalan Konsep Asas Terhadap Kalkulus Pecahan

Sebelum membina persamaan penghampiran beza terhingga tersirat Caputo pada persamaan (1.1), berikut adalah beberapa definisi asas bagi teori terbitan pecahan yang digunakan dalam perbincangan ini.

Definisi 1. [10] Pengoperasi kamiran pecahan Riemann-Liouville, J^α peringkat ke-α ditakrifkan sebagai

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^\alpha f(t)\,dt, \alpha > 0, x > 0 \tag{2.1}$$

Definisi 2. [10] Pengoperasi terbitan separa pecahan Caputo, D^α peringkat ke-α ditakrifkan sebagai

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x-1)^{\alpha-m+1}}\,dt, \alpha > 0 \tag{2.2}$$

dengan $m-1<\alpha\leq m,\ m\in\mathbb{N},\ x>0$.

Untuk mendapatkan penyelesaian berangka persamaan (1.1) dengan syarat sempadan Dirichlet, pertama kita perlu terbitkan persamaan penghampiran beza terhingga tersirat berdasarkan definisi terbitan Caputo dan pengoperasi terbitan pecahan bukan tempatan. Seperti diketahui bahawa persamaan penghampiran tersirat tersebut boleh dikategorikan sebagai skema pendiskretan stabil tanpa syarat. Bagi mendapatkan persamaan penghampiran ke atas persamaan (1.1), domain penyelesaian permasalahan yang terbatas $0\leq x\leq\alpha$, dengan $0<\alpha<1$, manakala parameter α pula merujuk kepada peringkat terbitan pecahan masa. Selain itu, syarat-syarat sempadan bagi persamaan (1.1) diberikan sebagai

$$U(0,t)=g_0(t),U(l,t)=g_1(t),$$

dan syarat awalnya pula diberikan oleh

$$U(x,0)=f(x),$$

dengan $g_0(t), g_1(t)$, dan $f(x)$ ialah fungsi yang diketahui. Sementara itu, penghampiran diskret bagi terbitan pecahan masa terhadap persamaan (1.1) dapat diwakili dengan menggunakan pengoperasi terbitan separa pecahan Caputo pada peringkat ke-α, ditakrifkan sebagai [10,11]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(n-1)}\int_0^\infty\frac{\partial u(x-s)}{\partial t}(t-s)^{-\alpha}ds,\ t>0,0<\alpha<1 \tag{2.3}$$

3 Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Caputo

Berpandukan persamaan (2.3), perumusan terbitan separa pecahan Caputo terhadap kaedah penghampiran peringkat pertama diberikan sebagai

$$D_t^\alpha U_{i,n}\cong\sigma_{\alpha,k}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{(\alpha)}(U_{i,n-j+1}-U_{i,n-j}) \tag{3.1}$$

Untuk memudahkan perumusan persamaan penghampiran terhadap permasalahan kajian, pertimbangkan ungkapan-ungkapan berikut

$$\sigma_{\alpha,k}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)k^\alpha}$$

dan

$$\omega_j^{(\alpha)} = j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}.$$

Sebelum mendiskretkan persamaan (1.1), domain penyelesaian pada persamaan tersebut perlu dibahagikan secara seragam. Justeru, pertimbangkan nilai integer positif m dan n merujuk kepada saiz grid terhadap ruang dan masa yang masing-masing ditakrifkan sebagai $h = \Delta x = \frac{\gamma - 0}{m}$ dan $k = \Delta t = \frac{T}{n}$. Berdasarkan saiz grid berkenaan, bina rangkaian grid seragam ke atas domain penyelesaian dan titik-titik grid terhadap domain ruang $[0, \gamma]$ yang ditandakan sebagai nombor $x_i = ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m$ dan sementara itu, titik-titik grid dalam tempoh rantau masa $[0, T]$ yang dilabelkan $t_j = jk,\ j = 0, 1, 2, \ldots, m$. Maka nilai fungsi $U(x, t)$ pada sebarang titik grid ditandakan sebagai $U_{i,j} = U(x_i, t_j)$.

Dengan menggunakan persamaan (3.1) dan skema pendiskretan beza terhingga tersirat, persamaan penghampiran beza terhingga tersirat Caputo pada persamaan (1.1) ke titik grid yang berpusat di $(x_i, t_j) = (ih, nk)$ diberikan sebagai

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha,k} \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(\alpha)} (U_{i,n-j+1} - U_{i,n-j}) \\ = a_1 \frac{1}{h^2}(U_{i-1,n} - 2U_{i,n} + U_{i+1,n}) + b_i \frac{1}{2h}(U_{i+1,n} - U_{i-1,n}) + c_i U_{i,n}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Persamaan penghampiran (3.2) dikenali sebagai persamaan penghampiran beza terhingga tersirat sapuan penuh dengan kejituan berperingkat pertama terhadap masa dan peringkat kedua terhadap ruang. Pada asasnya, persamaan penghampiran (3.2) boleh dituliskan semula berdasarkan tahap masa yang tertentu.

Untuk memudahkan perbincangan selanjutnya, pertimbangkan persamaan penghampiran untuk $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha,k} \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(\alpha)} (U_{i,n-j+1} - U_{i,n-j}) \\ = \left(\frac{a_i}{h^2} - \frac{b_i}{2h}\right) U_{i-1,n} + \left(c_i - \frac{2a_i}{h^2}\right) U_{i,n} + \left(\frac{a_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h}\right) U_{i+1,n} \\ = p_i U_{i-1,n} + q_i U_{i,n} + r_i U_{i+1,n}, \end{aligned} \tag{3.3a}$$

dengan

$$p_i = \frac{a_i}{h^2} - \frac{b_i}{2h},\ q_i = c_i - \frac{2a_i}{h^2},\ r_i = \frac{a_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h}$$

Apabila $n = 1$, dapat ditunjukkan bahawa

$$-p_i U_{i-1,1} + q_i^* U_{i,1} - r_i U_{i+1,1} = f_{i,1},\ i = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{3.3b}$$

dengan

$$\omega_j^{(\alpha)} = 1,\ q_i^* = \sigma_{\alpha,k} - q_i,\ f_{i,1} = \sigma_{\alpha,k} U_{i,1}$$

Berdasarkan persamaan (3.3b), dapat diperhatikan bahawa sistem linear tiga pepenjuru boleh dibina dalam bentuk matriks sebagai

$$\mathrm{A}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{f} \tag{3.4}$$

dengan

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} q_1^* & -r_1 & & & & \\ -p_2 & q_2^* & -r_2 & & & \\ & -p_3 & q_3^* & -r_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -p_{m-2} & q_{m-2}^* & -r_{m-2} \\ & & & & -p_{m-1} & q_{m-1}^* \end{bmatrix}_{(m-1)x(m-1)},$$

$$\underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{21} & U_{31} & \cdots & U_{m-2,1} & U_{m-1,1} \end{bmatrix}^T,$$

$$\underset{\sim}{f} = \begin{bmatrix} U_{11} + p_1 U_{01} & U_{21} & U_{31} & \cdots & U_{m-2,1} & U_{m-1,1} + p_{m-1} U_{m,1} \end{bmatrix}^T.$$

4 Perumusan Kaedah Lelaran Pengenduran Berlebihan Berpecutan Berprasyarat

Dengan meninjau ciri-ciri matriks pekali ke atas sistem linear (3.4), didapati bahawa sistem persamaan linear tiga pepenjuru tersebut mempunyai matriks pekali yang berskala besar dan jarang. Seperti yang dinyatakan dalam Bahagian 1, ramai penyelidik telah membincangkan pelbagai kaedah lelaran. Untuk mendapatkan penyelesaian hampiran bagi sistem tiga pepenjuru linear (3.4), perbincangan ini mempertimbangkan kaedah lelaran PBBP [10,17,18].

Sebelum melaksanakan kaedah lelaran PBBP, sistem linear asal [11,12,13] perlu diolah semula ke dalam bentuk sistem linear berprasyarat

$$\mathrm{A}^{*}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}^{*} \tag{4.1}$$

dengan

$$\mathrm{A}^{*} = \mathrm{PAP}^{T},$$
$$\underset{\sim}{f}^{*} = \mathrm{P}\underset{\sim}{f},$$
$$\underset{\sim}{U} = \mathrm{P}^{T}\underset{\sim}{x}$$

Hakikatnya, matriks P dikenali sebagai matriks berprasyarat dan ditakrifkan sebagai [19]

$$\mathrm{P} = \mathrm{I} + \mathrm{S} \tag{4.2}$$

dengan

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(m-1)x(m-1)},$$

dan matriks I ialah matriks identiti. Untuk membangunkan perumusan kaedah PBBP, matriks pekali A^{*} (3.4) perlu ditulis semula sebagai penjumlahan tiga matriks

$$\mathrm{A}^{*} = \mathrm{D} - \mathrm{L} - \mathrm{V} \tag{4.3}$$

dengan D, L dan V masing-masing ialah matriks pepenjuru, matriks segi tiga bawah dan segi tiga atas.

Dengan menggunakan persamaan (4.1) dan (4.3), perumusan kaedah lelaran PBBP boleh dinyatakan secara am sebagai [17,18,19]

$$\underset{\sim}{x}^{(k+1)} = (D-\omega L)^{-1}\left[\beta V + (\beta-\omega)D + (1-\beta)D\right]\underset{\sim}{x}^{(k)} + \beta(D-\omega L)^{-1}f \qquad (4.4)$$

dengan $\underset{\sim}{x}^{(k+1)}$ mewakili vektor yang tidak diketahui pada lelaran (k+ 1), serta β dan ω adalah dua parameter berpecutan. Jika $\beta = \omega$, kaedah ini dikenali sebagai kaedah lelaran PBBB. Justeru, pelaksanaan kaedah lelaran PBBP boleh diperihalkan dalam Algoritma 1.

ALGORITMA 1: Kaedah PBBP

i. Setkan $\widetilde{U} \leftarrow 0$ dan $\varepsilon \leftarrow 10^{-10}$.

ii. Untuk $j = 1, 2, \ldots, n$ laksanakan

a. Untuk $i = 1, 2, \ldots, m-1$ kirakan

$$\underset{\sim}{x}^{(k+1)} = (D-\omega L)^{-1}\left[\beta V + (\beta-\omega)D + (1-\beta)D\right]\underset{\sim}{x}^{(k)} + \beta(D-\omega L)^{-1}f, \underset{\sim}{U}^{(k+1)} = P^T \underset{\sim}{x}^{(k+1)}$$

b. Uji penumpuan $\left\|\underset{\sim}{U}^{(k+1)} - \underset{\sim}{U}^{(k)}\right\| \le \varepsilon = 10^{-10}$. Jika menumpu, teruskan ke langkah iii. Sebaliknya, kembali ke langkah ii(a).

iii. Paparkan penyelesaian hampiran

5 Eksperimen Berangka

Dengan menggunakan persamaan penghampiran (3.3a), perbincangan ini mengambil kira satu contoh persamaan resapan pecahan masa untuk menguji keberkesanan kaedah lelaran Gauss-Seidel, Gauss-Seidel berprasyarat, PBBB dan PBBP. Bagi membandingkan keberkesanan pengiraan terhadap keempat-empat kaedah lelaran tersebut, tiga kriteria telah dicadangkan seperti bilangan lelaran, masa lelaran (dalam saat) dan ralat mutlak maksimum pada tiga nilai α yang berbeza, iaitu $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.50$ dan $\alpha = 0.75$. Semasa pelaksanaan eksperimen berangka, ujian penumpuan lelaran hanya mempertimbangkan ralat toleransi yang ditetapkan iaitu $\varepsilon = 10^{-10}$.

Pertimbangkan permasalahan nilai sempadan awal pecahan masa yang diberikan sebagai [20]:

$$\frac{\partial^\alpha U(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, 0 < \alpha \le 1, 0 \le x \le \gamma, t > 0 \qquad (5.1)$$

dengan syarat-syarat sempadannya pula dinyatakan dalam bentuk peringkat pecahan sebagai

$$U(0,t) = \frac{2kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{5.2a}$$

$$U(l,t) = l^2 + \frac{2kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{5.2b}$$

dan syarat awalnya ialah

$$U(x,0) = x^2 \tag{5.3}$$

Dengan mempertimbangkan persamaan (5.1) pada $\alpha = 1$, dapat diperhatikan bahawa persamaan tersebut boleh diungkapkan semula sebagai persamaan resapan piawai

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le \gamma, \quad t > 0 \tag{5.4}$$

tertakluk kepada syarat awal

$$U(x,0) = x^2,$$

dan syarat-syarat sempadannya sebagai

$$U(0,t) = 2kt, U(l,t) = l^2 + 2kt$$

Kemudiannya penyelesaian analitikal bagi persamaan (5.4) dapat diperoleh sebagai

$$U(x,t) = x^2 + 2kt.$$

Selanjutnya dengan menggunakan fungsi berikut:

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\partial^n U(x,0)}{\partial t^n} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^{mn+i} U(x,0)}{\partial t^{mn+i}} \frac{t^{n\alpha+i}}{\Gamma(n\alpha+i+1)}$$

Untuk $0 < \alpha \le 1$, dapat ditunjukkan bahawa penyelesaian analitikal bagi persamaan (5.1) diberikan sebagai

$$U(x,t) = x^2 + 2k \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

JADUAL 1 Perbandingan bilangan lelaran, masa lelaran (saat) dan ralat maksimum bagi kaedah lelaran pada α = 0.25, 0.50 dan 0.75

M	Kaedah	α = 0.25			α = 0.50			α = 0.75		
		K	Masa	Ralat Maks	K	Masa	Ralat Maks	K	Masa	Ralat Maks
128	Gauss-Seidel	21017	37.73	9.9e-5	13601	5.92	9.8e-5	6695	2.94	1.3e-4
	Gauss-Seidel berprasyarat	7292	35.86	9.9e-5	4715	2.23	9.8e-5	2319	1.93	1.3e-4
	PBBB	281	2.24	9.9e-5	229	1.95	9.8e-5	164	1.63	1.3e-4
	PBBP	280	1.12	9.9e-5	225	1.50	9.8e-5	160	1.59	1.3e-4
256	Gauss-Seidel	77231	343.63	1.0e-4	50095	42.17	9.9e-5	24732	20.70	1.3e-4
	Gauss-Seidel berprasyarat	26884	261.56	9.9e-5	17417	16.68	9.8e-5	8585	12.37	1.3e-4
	PBBB	1428	16.90	9.9e-5	1171	12.61	9.8e-5	814	8.90	1.3e-4
	PBBP	1100	12.44	9.9e-5	950	10.75	9.8e-5	713	8.13	1.3e-4
512	Gauss-Seidel	281598	2747.34	1.2e-4	183181	339.85	1.0e-4	90783	166.75	1.3e-4
	Gauss-Seidel berprasyarat	98422	1916.28	1.0e-4	63298	123.01	9.9e-5	31619	62.78	1.3e-4
	PBBB	5524	113.86	9.9e-5	4520	91.37	9.8e-5	11695	61.98	1.3e-4
	PBBP	4397	92.58	9.9e-5	3754	78.34	9.8e-5	2780	59.09	1.3e-4
1024	Gauss-Seidel	1017140	68285.36	1.0e-4	663971	2454.53	1.0e-5	330622	1209.39	1.4e-4
	Gauss-Seidel berprasyarat	357258	14064.44	1.4e-4	232784	1007.47	1.0e-5	115617	820.93	1.3e-4
	PBBB	20574	817.59	9.9e-5	16842	662.23	9.8e-5	11695	456.23	1.3e-4
	PBBP	16487	699.81	9.9e-5	14058	607.00	9.8e-5	10394	429.58	1.3e-4
2048	Gauss-Seidel	3631638	58914.30	1.3e-4	2380946	17795.25	1.3e-4	1192528	8794.26	1.7e-4
	Gauss-Seidel berprasyarat	121156	4104.17	1.3e-4	19153.0	3239.84	13e-5	112899	1305.5	1.3e-4
	PBBB	75580	3043.59	1.3e-4	61941	2894.7	9.9e-5	43070	337.1	1.3e-4
	PBBP	56289	3002.21	1.3e-4	46535	2870.12	9.9e-5	33819	305.2	1.3e-4

Semua keputusan eksperimen berangka untuk persamaan (5.1), yang diperoleh daripada pelaksanaan kaedah lelaran Gauss-Seidel, Gauss-Seidel berprasyarat, PBBB dan PBBP telah direkodkan dalam Jadual 1 pada lima nilai yang berbeza bagi saiz grid, iaitu $m = 128, 256, 512, 1024$ dan 2048.

6 Kesimpulan

Dalam usaha untuk mendapatkan penyelesaian berangka bagi persamaan terbitan separa pecahan masa, khususnya persamaan resapan pecahan masa, perbincangan ini telah memperihalkan penerbitan persamaan penghampiran beza terhingga tersirat Caputo yang digunakan untuk menjana sistem persamaan linear pada setiap paras masa. Berpandukan penelitian terhadap keputusan eksperimen berangka bagi kaedah lelaran Gauss-Seidel, Gauss-Seidel berprasyarat, PBBB dan PBBP, jelas didapati bahawa, pada $\alpha = 0.25$ bilangan kaedah lelaran PBBP adalah menurun sekitar 64.87% hingga 99.79% berbanding kaedah Gauss-Seidel. Masa pelaksanaan lelaran bagi kaedah PBBP juga adalah lebih cepat iaitu sekitar 4.95% hingga 98.97% berbanding kaedah lelaran Gauss-Seidel. Justeru, dapat disimpulkan bahawa kaedah lelaran PBBP hanya memerlukan jumlah yang kecil terhadap bilangan lelaran dan masa lelaran berbanding kaedah lelaran PBBB, Gauss-Seidel berprasyarat dan Gauss-Seidel. Walau bagaimanapun, kejituan penyelesaian yang diperoleh bagi keempat-empat kaedah lelaran tersebut adalah setara.

Rujukan

1. Abdullah, A.R. 1991. The four point explicit decoupled group (EDG) method: A fast Poisson solver. *International Journal of Computer Mathematics*, 38: 61–70.
2. Baleanu, D., Machado, J.A.T., Catani, C., Baleanu, M.T. & Yang, X.J. 2014. Local fractional variational iteration & decomposition method for wave equation on Cantor sets within local fractional operators. *Abstract and Applied Analysis*, 1–6.
3. Ege, S.M. & Misirli, E. 2017. A new method for solving non linear fractional differential equations. *New Trend in Mathematicals Sciences*, 5(1): 225–233.
4. Meerschaert, M.M. & Tadjeran, C. 2004. Finite difference approximation for fractional advection-dispersion flow equations. *JCAM*, 172: 145–155.
5. Mao, Z,. Xiao, A., Yu, Z. & Shi, L. 2014. Finite difference and sinc-collacation approximations to a class of fractional diffusion wave equations. *Journal of Applied Mathematics*, 1–11.
6. Zhang, Y. 2009. A finite difference method for fractional partial differential equation. *Applied Mathematics and Computation*, 215: 524–529.

7. Duan, D.S, Guo, A.P. & Yun, W.Z. 2014. Similarity solution for fractional diffusion equation. *Abstract and Applied Analysis*, 1–5.

8. Feras, L.L., Ford, N.J., Morgado, M.L. & Robelo, M. 2014. A numerical method for the solution of the time-fractional diffusion equation. *Lecture Notes in Computer Science,* 8579: 117–131.

9. Al-Shibani, F.S., Md. Ismail, A.I. & Abdullah, F.A. 2014. Explicit finite difference methods for the solution of the one dimensional time fractional advection diffusion equation. *AIP Conference Proceeding*, 160: 380–385.

10. Su, L. & Cheng, P. 2013. A weight average finite difference method for the fractional convection diffusion equation. *Advances in Mathematical Physics*, 1–5.

11. Evan, D.J. & Martins, M.M. 2007. The AOR method for preconditioned linear systems. *International Journal of Computer Mathematics*, 56: 69–76.

12. Young, D.M. 1971. *Iterative Solution of Large Linear Systems.* London: Academic Press.

13. Hackbusch, W. 1995. *Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations.* New York: Springer-Verlag.

14. Saad, Y. 1996. *Iterative Method for Sparse Linear Systems.* Boston: International Thomas Publishing.

15. Ming, K.L. & Mohd Ali, M. 2015. New explicit group iterative methods in the solution of three dimensional hyperbolic telegraph equations. *Journal of Computational Physics*, 294: 382–404.

16. Md Akhir, M.K. & Sulaiman, J. 2017. Explicit decoupled group iterative method for the triangle element solution of 2D Helmholtz equations. *International Mathematical Forum*, 12(16): 771–779.

17. Yousif, W.S., Santos, J.L. & Evans, D.J. 2013. Explicit group USSOR method for solving elliptic partial differential equations. *Neural, Parallel and Scientific Computations*, 21(22): 279–292.

18. Li, A. 2012. A new preconditioned AOR iterative method and comparison theorems for linear systems. *IAENG International Journal of Applied Mathematics,* 42: 1–3.

19. Huang, T., Cheng, G., Evan, D.J. & Cheng, X. 2005. AOR type for solving preconditioned linear systems. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(8): 969–976.

20. Gunawardena, A.D., Jain, K. & Synder, L. 1991. Modified iterative methods for consistent linear systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 152–154: 123–143.

21. Ali, D., Erman, S., Ozgur, B. & Korkmaz, E. 2013. Analysis of fractional partial differential equations by Taylor Series Expansion. *Boundary Value Problems*, 68: 1–12.

Chapter Book

ORIGINALITY REPORT

15%	8%	9%	4%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	A Sunarto, J Sulaiman. "Computational algorithm PAOR for time-fractional diffusion equations", IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020 Publication	3%
2	borneoscience.ums.edu.my Internet Source	2%
3	Submitted to Universiti Malaysia Sabah Student Paper	1%
4	Submitted to Universiti Putra Malaysia Student Paper	1%
5	doczz.net Internet Source	1%
6	Andang Sunarto, Praveen Agarwal, Jumat Sulaiman, Jackel Vui Lung Chew, Elayaraja Aruchunan. "Iterative method for solving one-dimensional fractional mathematical physics model via quarter-sweep and PAOR", Advances in Difference Equations, 2021 Publication	1%
7	documents.mx	

Internet Source

1%

---

8 scitepress.org
Internet Source
1%

9 sinta3.ristekdikti.go.id
Internet Source
1%

10 manualzz.com
Internet Source
1%

11 A Sunarto, J Sulaiman, A Saudi. "Implicit finite difference solution for time-fractional diffusion equations using AOR method", Journal of Physics: Conference Series, 2014
Publication
1%

12 A Sunarto, J. Sulaiman. "Preconditioned SOR Method to Solve Time-Fractional Diffusion Equations", Journal of Physics: Conference Series, 2019
Publication
1%

13 citeseerx.ist.psu.edu
Internet Source
<1%

14 "Fractional Dynamics", Walter de Gruyter GmbH, 2015
Publication
<1%

15 Morgado, M.L., and M. Rebelo. "Numerical approximation of distributed order reaction–diffusion equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015.
<1%

Publication

Exclude quotes	On	Exclude matches	Off
Exclude bibliography	On		